Exercice 9 Puissance d'un test

$$\alpha = p(H_1 | H_0)$$

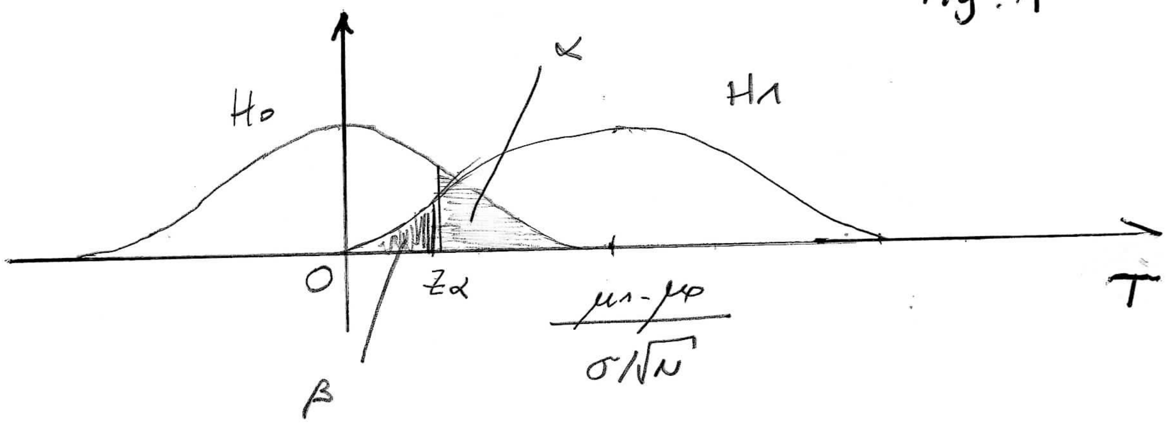
$$\beta = p(H_0 | H_1) \qquad 1-\beta = p(H_1 | H_1) = \text{puissance}.$$

Notations : T : statistique de test

Z : v.a. $\sim \mathcal{N}(0,1)$

1) Loi de la statistique T

Fig. 1



si H_0 est vraie : $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{N})$

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}} \sim \boxed{\mathcal{N}(0,1)}$$

si H_1 est vraie $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \frac{\sigma^2}{N})$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{N}} + \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}} \sim \boxed{\mathcal{N}\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}, 1\right)}$$

Calcul de la puissance $1-\beta$.

$$1-\beta = p(H_1 \mid H_1)$$

$$= p(T > z_\alpha \mid H_1)$$

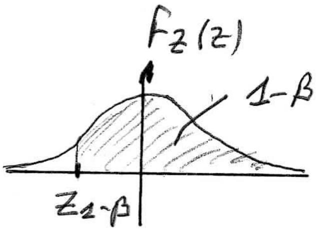
Or si H_1 est vraie $\quad T \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}, 1\right)$

$$\Rightarrow \quad T - \left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Donc :

$$1-\beta = p(T > z_\alpha \mid H_1)$$

$$= p\left(\underbrace{T - \frac{(\mu_1-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{N}}}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)} > \underbrace{z_\alpha - \frac{(\mu_1-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{N}}}_{z_{1-\beta}} \;\Big|\; H_1\right)$$



$$= \int_{z_{1-\beta}}^{+\infty} f_Z(z)\,dz$$

$$\boxed{z_{1-\beta} = z_\alpha - \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{N}}$$

2) Variations de la puissance du test.

qd. α varie

Lorsque $\alpha \searrow$ $\quad z_\alpha \nearrow$ $\quad \beta \nearrow$ $\quad 1-\beta \searrow$ $\quad$ et inversement

les risques de 1ère et 2ème espèce sont antagonistes.

N.B. augmenter α n'est pas une bonne méthode pour augmenter $1-\beta$!

qd. Δ varie.

qd $\Delta \nearrow$ $\quad z_{1-\beta} \searrow$ et donc $1-\beta \nearrow$

La puissance augmente et inversement lorsque l'écart $\mu_1-\mu_0$ augmente.

gd. N varie.

idem gd $N \nearrow$ $z_{1-\beta} \searrow$ $1-\beta \nearrow$

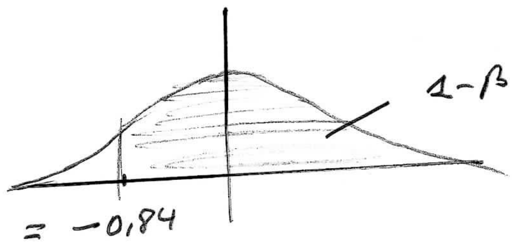
---

3) $\alpha = 5\%$ $\sigma = 1$ $N = \begin{cases} 10 \\ 20 \\ 30 \end{cases}$

On impose : $1-\beta \geq 0,80$

On donne la valeur suivante pour la fonction de répartition de Z : $p(Z \leq -0,84) = 0,2$

Ceci implique que : $p(Z > -0,84) = 0,8$



$1-\beta = 0,8$

$z_{1-\beta} = -0,84$

Pour avoir $1-\beta \geq 0,8$ il faut donc que

$\Leftrightarrow z_{1-\beta} \leq -0,84$

$\Leftrightarrow z_\alpha - \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{N} \leq -0,84$

$\Leftrightarrow \Delta \geq (z_\alpha + 0,84)\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

A.N. $\alpha = 5\% \Rightarrow z_\alpha = 1,64$

$\Delta \geq \frac{2,48}{\sqrt{N}}$

$N = 10$ $\Delta \geq 0,78$

$N = 20$ $\Delta \geq 0,55$

$N = 30$ $\Delta \geq 0,45$

4) $1-\beta \geq 0,80$

$\Leftrightarrow z_{1-\beta} \leq -0,84 \Leftrightarrow N \geq \left(\frac{(z_\alpha + 0,84)\,\sigma}{\Delta}\right)^2$

A.N. $N \geq \left(\frac{2,48}{0,1}\right)^2 = 615,04$ donc $\boxed{N \geq 616}$